Zarządzanie
Lista nr 9

Zad 1. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

1) $y = |x|$ *w punkcie* $x_0 = 0$; 2) $y = x^2 + |x^2 - 4|$ *w punkcie* $x_0 = 2$;

3) $y = \begin{cases} x^2 + x + 1 & dla\ x \ge 1 \\ 3x^3 & dla\ x < 1 \end{cases}$; 4) $y = \begin{cases} xarctg\,\frac{1}{x} & dla\ x \ne 0 \\ 0 & dla\ x = 0 \end{cases}$;

Zad 2. Korzystając z reguł obliczania pochodnych obliczyć pochodne następujących funkcji:

1) $y = 5x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$; 2) $y = x + 3e^x + 2\ln x$; 3) $y = 2\sqrt[5]{x} + \frac{5}{x^2}$; 4) $y = \sin x + \cos x$;

5) $y = 2arctgx - arcctgx + \arccos x$; 6) $y = \frac{3x^2 - 4x}{4x^2 + 3}$; 7) $y = \frac{x + e^x}{2x^2 + 1}$; 8) $y = xe^x$; 9) $y = 10x^3 \ln x$;

10) $y = \cos(2x + 1)$; 11) $y = \sin^2 x$; 12) $y = e^{4x^5 + 7}$; 13) $y = (1 + \sqrt[4]{x})tg(3x)$; 14) $y = \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$;

15) $y = x\sin(2^x)$; 16) $y = 2^{3^x}$; 17) $y = e^{x^2} \ln x$; 18) $y = \sin(\cos\frac{1}{x})$; 19) $y = \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$;

20) $y = [\log_3(x^2 - 1)]^2$; 21) $y = \sqrt[3]{arctg\,\frac{x+3}{4}}$; 22) $y = x^x$; 23) $y = (\sin x)^x$;

Wskazówka do 22) 23) zastosować wzory : $e^{\ln x} = x$; $e^{\ln g(x)} = g(x)$.

Zad 3. Obliczyć pochodne rzędu od pierwszego do piątego funkcji: $y = -4x^4 + 7x^2 + 12x + 6$.

Zad 4. Obliczyć drugą pochodną funkcji: 1) $y = 3x^3$; 2) $y = \arccos x$; 3) $y = xe^{\sin x}$.

Zad 5. Zbadać różniczkowalność następujących funkcji:

1) $y = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & dla\ x < 1 \\ x^3 - 4x + 6 & dla\ x \ge 1 \end{cases}$; 2) $y = \begin{cases} x & dla\ x < 0 \\ \ln(x+1) & dla\ x \ge 0 \end{cases}$;

Zad 6. Niech $f(x) = \begin{cases} \sin x & dla\ x < 0 \\ Ax^2 + Bx & dla\ x \ge 0 \end{cases}$.

Dobrać A i B tak, aby funkcja f była wszędzie różniczkowalna.

Zad 7. Wyznaczyć różniczki funkcji:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; 2) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; 3) $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Zad 9. Obliczyć przybliżoną wartość następujących wyrażeń:

1) $\sqrt[4]{16{,}64}$; 2) $\sqrt{8{,}76}$; 3) $(2{,}01)^2$; 4) $arctg(0{,}98)$; 5) $\sin 29^\circ$.

Zad 10. Napisać równanie stycznej i normalnej do krzywej:

1) $y = x^2 - 4x + 7$, $x_0 = 1$; 2) $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$, $x_0 = 2a$.

Zad 11. Zbadać monotoniczność następujących funkcji:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$; 2) $y = x^4 - 2x^2 - 5$; 3) $y = \sqrt{2x - x^2}$; 4) $y = x^2 e^{-x}$.

5) $y=\frac{1}{x^2}+x^2$; 6) $y=x+\frac{4}{x}$; 7) $y=\frac{x}{x^2+1}$

Zad 12. Wyznaczyć ekstrema funkcji:

1) $y=x^3-6x^2-9x-4$; 2) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 3) $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $y=x^2\ln x$.

Zad 13. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:
1) $y=x-2\ln x \quad w \quad x\in<1,e>$; 2) $y=x^4-2x^2+5 \quad w \quad x\in<-2,2>$; 3) $y=arctgx^2$ w R.

Zad 14. Wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:
1) $y=\frac{1+x}{1+x^2}$; 2) $y=\ln(x^2+1)$; 3) $y=x\ln\frac{1}{x}$;

Zad 15. Wyznaczyć asymptoty wykresów: 1) $y=\frac{3-x^2}{2-x}$; 2) $y=\frac{2x^2-1}{x^2}$; 3) $y=xarctgx$.

Zad 16. Sprawdzić, czy poniższe funkcje spełniają w przedziale <-1,1> warunki twierdzenia Rolle'a:
1) $f(x)=-x^2+1$; 2) $f(x)=1-|x|$.

Zad 17. Czy funkcja $f(x)=3x^2-5$ spełnia w przedziale <-2,0> warunki twierdzenia Lagrange'a? Jeśli tak, to wyznaczyć punkt *c* taki, że $f(b)-f(a)=f\,'(c)(b-a) \quad dla \quad c\in(a,b)$.

Zad 18. Wielomian $f(x)=2x^4+x^3-2x^2-x+2$ przedstawić w postaci sumy potęg dwumianu *x-1*.

Zad 19. Stosując regułę de L'Hospitala obliczyć granice:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{a^x+e^{-x}-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{tgx}{\ln(x-\frac{\pi}{2})}$; 6) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\cdot\ln(1-x)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x$; 8) $\lim\limits_{x\to0^+}(ctgx-\frac{1}{x})$; 9) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$.

Zad. 20. Korzystając z definicji pochodnej obliczyć pochodną funkcji:
1) $f(x)=x^2$, 2) $f(x)=\sin x$, 3) $f(x)=\sqrt{x}$,4) $f(x)=x^3$, 5) $f(x)=\sqrt{x+1}$